Théorème de Burnside

Théorème : Soit $G \leq GL_n(\mathbb{C})$. Si G est d'exposant fini, alors G est fini.

Lemme : Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $tr(A^k) = 0$, alors A est nilpotente.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ vp de A, de multiplicités $n_1, \dots, n_r$ non nulles, distinctes.
En trigonalisant (dans $\mathbb{C}$), $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $tr(A^k) = \sum_{i=1}^{r} n_i \lambda_i^k = 0$
Par déterminant de Vandermonde, il y a une unique solution, donnée par
$n_1 = \dots = n_r = 0$.
Donc $Sp\, A = \{0\}$, $\chi_A = X^n$, A est nilpotente.

Soit $(M_i)_{1 \leq i \leq m}$ base de $Vect(G)$. Posons $f : A \in G \mapsto (tr(AM_i))_{1 \leq i \leq m}$.
Supposons $f(A) = f(B)$. Soit $D = AB^{-1}$.
$tr(D^k) = tr(AB^{-1}D^{k-1}) \underset{\uparrow}{=} tr(BB^{-1}D^{k-1}) = tr(D^{k-1})$ donc $tr(D^k) = tr(I_n) = n$.
car $tr(AM) = tr(BM)$, $\forall M$
De là, $tr((D-I)^k) = tr\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^{k-j} (-1)^j\right) = n\,(1-1)^k = 0$ donc $D - I_n$ est nilp.

D'autre part, par hypothèse, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\forall M \in G$, $M^N = I_n$, donc $X^N - 1$ annule toutes les matrices de G :
$X^N - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, donc $D \in G$ est diagonalisable.
Donc $D - I_n$ est diagonalisable et nilpotente, i.e. $D = I_n$, $A = B$.

$f(A) = f(B) \Rightarrow A = B$, f injective.

Posons $X = \{tr\, A,\ A \in G\}$.

- X est fini car les vp des éléments de G sont des racines N-ièmes de l'unité.
- $f(G) \subset X^m$ car $\forall A \in G$, $f(A) = (tr(AM_i))_{1 \leq i \leq m} \in X^m$ car $AM_i \in G$.

De là, $f : G \longrightarrow X^m$ est injective, ce qui assure G fini.